74回生（１年生）　Weekly数学　　【5/18（月）～5/22（金）の週】

　みなさん、勉強していますか。得手不得手はあって当然ですが、自分のペースで勉強することはやめずに、将来の自分のため頑張りましょう。

＜今週の数学のα のポイント＞　教科書　数Ⅰ　p.59 ～ p.63

　証明法を勉強する前に、教科書p.59 19行目に書いてある事実を絶対忘れてはいけません。大切だからここにも書きます。

命題が真であっても、その逆は真であるとは限らない。

　言われればその通りですが、中途半端な理解だといざ自分が答案を書くときに、いつの間にか仮定と結論を逆にしてしまいます。逆にこれをちゃんと理解していれば、話を聞くときに正しいか正しくないかを判定するとてもよい基準になります。

　さて、証明の話をしますが、その前に次の命題の真偽を考えてください。

$$xy>0 \Longrightarrow 「x>0 \text{ かつ } y>0」$$

　これを偽だと言う人は考えが甘いですよ。答えは「真になるかもしれないし、偽になるかもしれない」です。

　証明をするときに何が必要かわかりますか？それがわかれば私が言っている答えが理解できるはずです。

　それは、大前提が何か、数学的に言えば、**考える土台となる全体集合が何か**、です。

　この命題で言うと、xとyはどんな数か、という根本が抜けているから、悪い言い方をすると「考えるに値しない」命題だということです。xとyが実数だったら偽だし、自然数だったら真ですね。まぁ、自然数だったら考えるまでもなく当たり前ですが…。

　そして、全体集合を定義することで、条件の否定が考えられるようになります。「xは自然数である」という条件は、整数という全体集合で考えるときに、否定は「xは負の整数または0である」になります。全体集合が何かわからなかったら、「xは自然数ではない」としか言えません。全体集合を定義することはものすごく大切なのです。

　では、否定を考えることの最大のメリットは何か。それは教科書 p.60 の８行目に書いてある事実が利用できることです。「ある命題とその対偶は真偽が一致する」ですね。なぜでしょう。ちゃんと自分の頭を使って考えるのですよ。鵜呑みはだめです。

　p.61 練習１８をやってみます。直接証明することもできそうですが、対偶を使ってみます。

　対偶とはなにか。ある命題が2つの条件$p,\ q$を用いて$p \Longrightarrow q$の形で表されているとき、$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$を対偶と言います。ここで、$\overline{p}$というのは条件$p$の否定です。今、$p：x+y>0,\ \ q：x>0$ または $y>0$ とします。

　対偶を使いたいので、$\overline{p},\overline{q}$を考えます。$\overline{p}$は何でしょうか。まぁ、$x+y \leqq 0$ なんですが、しっかり説明します。

　さて、命題の真偽を考えるときに、条件を満たすものの集合（教科書には載っていませんが、これを真理集合と言います）の大きさ比べをしますが、条件pの真理集合をPとすると、条件$\overline{p}$の真理集合は$\overline{P}$です。

$P \cup \overline{P} = U$ ですから、そうなるような条件$\overline{p}$は何か、というように考えます。$x,\ y$は実数ですから

$x+y$ は正、0、負のいずれかになります。だから、$\overline{p}$ は $x+y \leqq 0$ なのです。

$\overline{q}$ はどうでしょうか。「かつ」の否定は「または」とか、ちゃんと考えずにそこだけ覚えるのはやめましょうね。馬鹿になってはいけません。

x, y の値のとり方は、次のように考える（いろんな考え方があるからね）と4通りです。

① $x>0$ かつ $y>0$　② $x>0$ かつ $y \leqq 0$　③ $x \leqq 0$ かつ $y>0$　④ $x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$

「$x>0$ または $y>0$」というのは①、②、③を合わせた条件ですから、真理集合 Q, $\overline{Q}$ について、$Q \cup \overline{Q}=U$ だから、$\overline{q}$ は「$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$」となるのです。

これで対偶は、「$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$」ならば $x+y \leqq 0$ となります。これが真であることは自明ですね。（自明というのは定義より明らかという意味です）よって証明が終わりました。

長々と説明しましたが、ここがあいまいだとどこかで必ず間違えます。このことを確実に理解してください。

最後に背理法についてです。背理法というのは、「ある命題が偽であると仮定して論証していくと、どこかで矛盾が生じた。矛盾が生じたのは命題を偽だと仮定したからだから、命題は真である。」という証明方法です。以前GWのWeekly数学にも書きましたが、背理法を使って証明できることは多いです。教科書の例題などを各自で勉強してください。質問があればメールでどうぞ。

ところで、条件だけでなく、命題にも否定があります。否定された命題は、もとの命題と真偽が入れ替わります。

例えば、$\sqrt{2}$ は無理数である、というのは真の命題ですが、その否定命題「$\sqrt{2}$ は無理数でない」というのは偽の命題です。命題を否定せよ、と言われたらこのように真偽を入れ替えるように命題をかけばよいのです。

p.63 「すべての実数 x について $x^2+1>0$」という文を考えます。まずはこの文が条件ではなく命題だという認識を持ってくださいね。正しいか正しくないかはっきり決まる文ですから、これは命題です。それでは、この命題の否定を考えましょう。

すべての実数 x について $x^2+1 \leqq 0$ といいたくなるでしょう。これも偽の命題ですからね。しかし、すべての実数 x について $x^2+1>0$ が成り立つということは、「1個も $x^2+1 \leqq 0$ を満たす x はない」と言っているわけだからこれを否定すると、「少なくとも1個は $x^2+1 \leqq 0$ となる x が存在する」となります。これを数学的には「ある実数 x について $x^2+1 \leqq 0$」と表現するのです。

「ある実数 x について $x^2=4$」という命題の否定はどうでしょうか。今度は「ある実数 x について $x^2 \neq 4$」は真の命題となってしまうのでこれは否定ではありません。どこを変えればよいでしょうか。「すべての実数 x について $x^2 \neq 4$」と表現すればいいのですね。これは偽の命題になります。

ここの発展は難しいですが、背理法（の一部）を使う際は否定された命題を仮定として利用するため、慣れておくとよいところだと思います。

全体を通して長くなりましたが、理系文系問わず、論理について学ぶことは非常に大切ですので、嫌がらずに頑張ってください。

<今週の数学のβ のポイント>　教科書　数A　p.46 ～ p.52

そんなに難しい内容ではありません。当たり前じゃんそんなこと、ということばかりです。わざわざ覚えることではありません。少なくとも私は、排反、余事象という言葉ぐらいしか使いません。確率の話は、ほぼ前回のWeekly数学に書いてあることで80%は尽きています。

ということで、確率の考え方の復習を例題を用いてしていきましょう。

例題14　15本のくじの中に当たりくじが5本ある。この中から2本のくじを同時に引くとき、少なくとも1本が当たる確率を求めよ。

確率は、何しているか正確に理解することが大切です。この問題では「くじを2本引く」ですね。何通りあるでしょう？

この何通りあるか、というのは、確率の問題の場合、「同様に確からし」ければ何通りでもよいのです。この場合は、${}_{15}C_2$ 通りと答える人が一般的だと思いますが、${}_{15}P_2$ でも問題ありません。

さて、くじを2本引いたときに考えられる場合は次の３つです。

①　2本とも当たる。　②　当たりとはずれが1本ずつ。　③　2本ともはずれ。

少なくとも1本当たるのは①と②で、数えるのが大変そうだから、③を数えて全体から引く、という作戦をとろう。

③を数えるのは簡単で、全体を ${}_{15}C_2$ 通りとしたならば ${}_{10}C_2$ 通り、${}_{15}P_2$ 通りとしたならば ${}_{10}P_2$ 通りとなります。

よって少なくとも1本当たるのは、${}_{15}C_2-{}_{10}C_2$ 通りなので、確率は $\dfrac{{}_{15}C_2-{}_{10}C_2}{{}_{15}C_2}$ となります。P で考えた場合は C を P に置き換えてください。

健闘を祈ります。質問はメールにて。