81班　完全数のあまりにもすばらしい法則性がある

～一面的な完全って、本当に完全なのかな～

要旨

自身を除いた約数の和を次の項とする数列(アリコート数列)の法則性や、それに関する事項(完全数や aspiring number など)についての性質及び法則性について研究し、アリコート数列の前項に関する定理や完全数を自然数で割ったあまりについての定理を発見した。

研究の背景・目的・意義

アリコート数列は性質上、一般項を出すのが難しく、直接求める以外の方法で収束または循環を示す方法が発見されていない。また、収束のパターンとして挙げられる完全数や友愛数に関しても、未解決な事柄が多い。そこで、完全数やアリコート数列に関する定理を新しく示すことで、これらに関係する未解決問題を解決するための手がかりになるのではないかと考え、研究した。

仮説

現在発見されている偶数完全数を様々な自然数で割る実験を行い、その結果から、「ある自然数nについて、偶数完全数をnで割ったあまりについて法則性が見られるようなnが存在する。また、そのnについても法則性がある。」という仮説をたてた。(以下、仮説①とする。)

また、6 の aspiring number やその前項について調査した結果から、「アリコート数列の任意の項a_nについて、その前項a_{n-1}に、a_nの値による存在条件及び存在範囲が存在する。」という仮説をたてた。

(以下、仮説②とする。)

定義

$$\sigma(n) \coloneqq \sum_{d|n} d \quad (n, d \in \mathbb{N})$$

メルセンヌ素数 $\coloneqq$ $2^n - 1$の形で表される素数 ($n \in \mathbb{N}$)

アリコート数列 $\coloneqq$ 任意の項a_nについて，$a_{n+1} = \sigma(a_n) - a_n$を満たす整数列。

($a_n = 0$ のとき,a_{n+1}は定義されない。)

また,アリコート数列$\{a_n\}$について,それに関する数を以下のように定義する。

完全数 $\coloneqq$ $a_n = a_{n+1}$を満たす項a_n

aspiring number $\coloneqq$ a_{n+1}が完全数となる項a_n

約数和分解 $:=$ 自然数nを㋐のように変形し、その$m_1, m_2, \cdots m_k$の組としてあり得る自然数の組の集合$N_1, N_2, \cdots, N_a$をつくること。

$$n = 1 + m_1 + m_2 + \cdots + m_k \ \cdots ㋐$$
$$(m_1, m_2, \cdots m_k, n \in \mathbb{N}, 1 < m_1 < m_2 < \cdots < m_k)$$

定理

① 整数a, b, x, yについて,ある正の整数mを法として,

$$x \equiv y \implies ax + b \equiv ay + b$$

また，自然数kについて,

$$a \equiv a^2 \implies a \equiv a^k$$

② $2^n - 1$ *が素数* $\implies$ n*は素数*（$n \in \mathbb{N}$）

③ $2^n - 1$ *が素数* $\iff$ $2^{n-1}(2^n - 1)$*は偶数完全数*（$n \in \mathbb{N}$）

発見した命題の証明

命題１

集合Xを以下のように定義する。

$$X = \{x \in \mathbb{N}, x|72\}$$

また，M_pを 6 でも 28 でもない偶数完全数とすると,

Xの任意の要素xについて,以下の式が成立する。

$$M_p \equiv -8 \quad (mod\ x)$$

〈証明〉

xは 72 の約数なので，$72 \equiv 0 \iff 64 \equiv -8 \quad (mod\ x)$

つまり，$(-8)^2 \equiv -8$が成立するので，定理①より $-8 \equiv (-8)^m \quad (mod\ x)$

特に，$64 \equiv 64^m \quad (mod\ x)$ が成立。$(m \in \mathbb{N})$

$f(n) = 2^{n-1}(2^n - 1)$とし，以下，断り書きのない合同式はxを法とする。

定理②より，$2^n - 1$が素数 $\implies$ nは素数

定理③より，$2^n - 1$が素数 $\iff$ $f(n)$は偶数完全数

$n = 2 \iff f(n) = 6, n = 3 \iff f(n) = 28$より，$n = 2,3$のときは考えなくてよい。

したがって，nが素数のとき，$n = 5, 6k + 1, 6k + 5$ $(k \in \mathbb{N})$

(1) $n = 5$のとき　　　$f(5) = 2^4(2^5 - 1) \equiv -8$

(2) $n = 6k + 1$のとき

$$f(6k + 1) = 2^{6k}(2^{6k+1} - 1) \equiv -8(-8 \cdot 2 - 1) = 64 \cdot 2 + 8 \equiv -8 \cdot 2 + 8 = -8$$

(3) $n = 6k + 5$のとき

$$f(6k + 5) = 2^{6k+4}(2^{6k+5} - 1) \equiv -8 \cdot 16(-8 \cdot 32 - 1) \equiv -8 \cdot 8 + 8 \cdot 16 \equiv -8$$

(1),(2),(3)より，題意は示された。 ■

特に，x =1,2 のとき，M_p=6,28　$x = 3,4,6,9,12,36$のとき，M_p=28 でも成立。

命題２

$$n-1\ が素数 \Longrightarrow {}^{\exists}k\ s.t.\ \sigma(k)-k=n\ (n,k\in\mathbb{N})$$

〈証明〉

$n-1$は素数なので，$(n-1)^2$の約数は $1, n-1, (n-1)^2$ のみ。

$$\therefore\ \sigma\{(n-1)^2\}-(n-1)^2=\{1+(n-1)+(n-1)^2\}-(n-1)^2$$
$$=n$$

■

命題3

S≔非負整数a,bを用いて$2^a\times(1$ と2^bでない平方数$)$で表される自然数の集合

また、自然数nが偶数であることを$n{:}\,even$,奇数であることを$n{:}\,odd$と表記する

$\sigma(k)-k=n$が成立し、$n{:}\,odd$ならば、

$$(k=2^m)\vee(k{:}\,odd\wedge k\notin S)\vee(k{:}\,even\wedge k\in S)\quad(m\in\mathbb{N})$$

〈証明〉

対偶の命題を示す。すなわち、$\sigma(k)-k=n$であるとき、

$$(k\neq 2^m)\wedge(k{:}\,odd\wedge k\notin S)\wedge(k{:}\,even\wedge k\in S)\ \Longrightarrow n{:}\,even$$

を示す。

ただし,$k{:}\,even$と$k{:}\,odd$は同時に成立しないため、以下の２つの場合を考える。

(1) $(k\neq 2^m)\wedge(k{:}\,odd\wedge k\notin S)$　　(2) $(k\neq 2^m)\wedge(k{:}\,even\wedge k\in S)$

　$k={p_1}^{e_1}\cdot{p_2}^{e_2}\cdot\ \cdots\ \cdot{p_t}^{e_t}$とする。($p_1,p_2,\cdots p_t$は相異なる素数,$e_1,e_2,\cdots e_t\in\mathbb{N}$)

　また、$P(x)=\sum_{i=0}^{e_x}(p_x)^i$ とする。

　このとき、$\sigma(k)=P(1)\cdot P(2)\cdot\ \cdots\ \cdot P(t)$である。

(1)$k{:}\,odd\wedge k\in S$のとき、$P(1),P(2),\cdots,P(t)$はすべて奇数である。

　(∵ $k\neq 2^m$より、$P(1),P(2),\cdots,P(t)$はいずれも奇数個の奇数の和である)

　$\therefore\sigma(k){:}\,odd$であるため、$\sigma(k)-k{:}\,even$

(2)$k{:}\,even\wedge k\notin S$のとき、$P(1),P(2),\cdots,P(t)$のうちいずれかは偶数である。

　(∵ 平方数でない数の約数は偶数個より、$P(1),P(2),\cdots,P(t)$のいずれかは
　偶数個の奇数の和である)

　$\therefore\sigma(k){:}\,even$であるため、$\sigma(k)-k{:}\,even$

(1),(2)より、題意は示された。　■

アリコート数列の前項について

aspiring number の法則性や性質を研究した。

(1)約数和分解を用いたアリコート数列前項の推定

自然数nの約数和分解によりできた集合$N_1, N_2, \cdots, N_a$の中に、ある自然数mの正の約数のうちm自身を除いたものの集合Mと一致するものがあるならば、mはアリコート数列におけるnの前項となりえる。約数和分解のパターン数は有限であるため、これを用いて、任意の整数のアリコート数列における前項の構成約数をすべて推定できる。

このことを用いて、コンピュータで自然数nの約数和分解を列挙し、そのパターンからアリコート数列の項nの前項の候補を上限ありで列挙するプログラムを作成した。(コンピュータでは処理を簡単にするためにいくつかの結果に影響を及ぼさない条件を設ける。)

(2) 6 の aspiring number とその前項の法則性

前述のプログラムを用いて、6 の aspiring number は 25 のみであることを示した。また、25 の前項の候補は 95、119、143 でそれらの前項の候補…というように調査すると、異なる 2 つの素数の積で表される自然数が多く登場することに気づいた。

(3)前項の存在範囲

$n = 1 + p + q\ (p < q, p, q$は素数$)$とすると、$m = pq$はアリコート数列の項$n$の前項の候補である。$q = n - p - 1$より、$m = p(n - p - 1) = -\left(p - \frac{n-1}{2}\right)^2 + \frac{(n-1)^2}{4}$

この式から、nの前項の候補はpが$\frac{n-1}{2}$に近ければ近いほど、前項mは大きくなることがわかる。前述の 6 の aspiring number である 25 の前項の候補や、その前項の候補でもこの傾向は見られた。

結論

命題 1 より、仮説①の立証は、おおむね達成されたといえる。

命題 2,3 及び「アリコート数列の前項について」の内容より、仮説②の立証は、おおむね達成されたといえる。

今後の展望

〈法とあまりについて〉

72 の正の約数を法としたときに、偶数完全数の余りが$3^n + 1$となる法則性があり、そこから法と剰余の関係について、72 の正の約数以外についても法則性を調べ、仮説①をより深く研究していきたい。

謝辞
本論文の執筆にあたり、多くの方々にご支援いただきました。
本研究について、堀江悟教諭に貴重なご指導とご助言、83 班の皆様にご助言を賜りました。感謝申し上げます。

参考文献
https://mathworld.wolfram.com/AliquotSequence.html | Aliquot Sequence -- from Wolfram MathWorld　(2025/01/30 閲覧)

https://core.ac.uk/download/pdf/198558874.pdf | 高校生への数学講義の一例 —完全数とメルセンヌ素数— (2025/01/30　閲覧)

https://oeis.org/A063769 | OEIS A063769　(2025/03/16 閲覧)